EXAMEN DE MECANIQUE - L1 PCP - Juin 2009.

I

A 1) $\vec{e}_\rho = -\cos\varphi\,\vec{e}_z + \sin\varphi\,\vec{e}_y$ $\qquad \vec{e}_\varphi = \cos\varphi\,\vec{e}_y + \sin\varphi\,\vec{e}_z$.

2) Une force est conservative si son travail est indépendant du chemin suivi.

3) $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ 0,5 $dE_p = -\delta W$ (pour une force conservative) $\Rightarrow E_p = -\int \vec{F}\,\vec{dl} + cte$

$E_m = E_c + E_p$ 0,5

0,5 4) TPM : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}^{F\,\text{noncons}}$ 0,5

B - 1) $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ 1 $\quad \vec{R}_f = N\vec{e}_\rho$ 1 ($\perp$ au déplacement, car pas de frott)

2) $\vec{dl}(M) = R\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$ 1, $\vec{v}(M|R) = \frac{\vec{dl}}{dt} = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ 1

3) $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2$ 0,5

$\delta W = \vec{P}\cdot\vec{dl} = -mg\vec{e}_z \cdot R\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi = -mgR\sin\varphi\,d\varphi = -dE_p$

$\Rightarrow E_p(\varphi) - \underbrace{E_p(\varphi=0)}_{=0} = mgR\left[-\cos\varphi\right]_0^\varphi = mgR(1-\cos\varphi)$

$E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + mgR(1-\cos\varphi)$ 0,5

4) Seule la réaction est non conservative. Mais $\vec{R}_f \perp$ déplacement $\Rightarrow$ son travail est nul $\Rightarrow \mathcal{P}^{\text{noncons}} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$: E_m se conserve.

5) TPM $\Rightarrow mR^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgR\sin\varphi\,\dot{\varphi} = 0 \iff \ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0$ 0,5

6) $\sin\varphi \simeq \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ et $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ 0,5

$\varphi(t=0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = B\omega\cos\omega t$

$v(t=0) = v_0 = R\dot{\varphi}(t=0) = BR\omega \Rightarrow B = \frac{v_0}{R\omega}$ $\Big\} \Rightarrow \varphi(t) = \frac{v_0}{R\omega}\sin\omega t$ 0,5

$\vec{v}(t) = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\,\vec{e}_\varphi$ 0,5

7) TEC : $\Delta E_c = W(\text{ttes Forces})$

8) $W(\text{ttes forces}) = W(\vec{P}) = \int_A^M \vec{P}\cdot\vec{dl} = -mg(R - R\cos\varphi) = -mg(R+z)$ 1

$\Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2g(R+z)}$ 0,5

9) $v = 0 \iff 2g(R+z_0) = v_0^2 \iff z_0 = \frac{v_0^2}{2g} - R$ 0,5

Si M arrive en $z = R$, alors il peut faire un tour complet.

$\Rightarrow R = \frac{v_{0c}^2}{2g} - R \iff (v_0)_c = 2\sqrt{Rg}$ 1

I C -

1) $\vec{\Omega}(R'|R) = \Omega\vec{e}_z$.

2) $\vec{v}(M|R') = \left[\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right]_{R'} = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ 1

3) $\vec{v}_e(M,R'|R) = \underbrace{\vec{v}(O'\in R'|R)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}(R'|R)\times\vec{O'M} = \Omega\vec{e}_z \times R\vec{e}_\rho = \Omega R\sin(\pi-\varphi)\vec{e}_{x'}$

$\Rightarrow \vec{v}_e(M,R'|R) = \Omega R\sin\varphi\,\vec{e}_{x'}$ 1

4) $\vec{v}(M|R) = \vec{v}_e(M,R'|R) + \vec{v}(M|R') = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \Omega R\sin\varphi\,\vec{e}_{x'}$

5) $\vec{a}(M|R') = R(\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho)$ 1

6) $O' \equiv O$ fixe et $\Omega = cte \Rightarrow \vec{a}_e(M,R'|R) = \vec{\Omega}(R'|R)\times(\vec{\Omega}(R'|R)\times\vec{O'M}) = \Omega^2R\sin\varphi\,\vec{e}_{y'}$ 1

$\vec{a}_c(M,R'|R) = 2\vec{\Omega}\times\vec{v}(M|R') = 2\Omega\vec{e}_z \times R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = -2\Omega R\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{e}_{x'}$

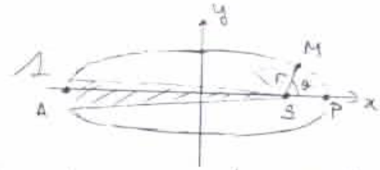
7) $\vec{a}(M|R) = \vec{a}(M|R') + \vec{a}_e(M,R'|R) + \vec{a}_c(M,R'|R) = R(\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho) - \Omega^2R\sin\varphi\,\vec{e}_{y'} - 2\Omega R\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{e}_{x'}$

8) $\vec{P} + \vec{R}_f = m\vec{a} \Rightarrow$ on projette sur $\vec{e}_\rho$

$\Rightarrow R_f = -mg\cos\varphi + m\left[-R\dot{\varphi}^2 + \Omega^2R\sin^2\varphi\right]$ 1

II

II /15



1) $r_P = r(\theta=0) = \frac{p}{1-e}$

$r_A = r(\theta=\pi) = \frac{p}{1+e}$

2) Dans le cas d'une force centrale, l'aire balayée par le rayon vecteur pendant un intervalle de temps donné est cte.

3) a) $\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} = \frac{1}{2}\|\vec{r}\times\vec{v}\| \Rightarrow C = \|\vec{r}\times\vec{v}\| = r^2\dot{\theta}$ 1

b) $\frac{dC}{dt} = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$ $(C = cte) \Rightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$

4) a) $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + \cancel{(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}\vec{e}_\theta$

b) $r = \frac{p}{1-e\cos\theta} \Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{-p(-e)(-\sin\theta)}{(1-e\cos\theta)^2}\dot{\theta} = \frac{-pe\sin\theta}{(1-e\cos\theta)^2}\dot{\theta}$ 1

$\Rightarrow \dot{r} = -e\sin\theta\frac{r^2}{p}\dot{\theta} \Rightarrow \dot{r} = -\frac{Ce}{p}\sin\theta$ 1

c) $\ddot{r} = -\frac{Ce}{p}\cos\theta\,\dot{\theta} = -\frac{C^2e}{p}\frac{\cos\theta}{r^2}$ 1 $\Rightarrow \vec{a} = -\left(\frac{C^2e\cos\theta}{pr^2} + \frac{rC^2}{r^4}\right)\vec{e}_r$ 1

d) $a = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{e\cos\theta}{p} - \frac{1}{r}\right) = -\frac{C^2}{pr^2} \Rightarrow K = \frac{C^2}{p}$ 1

e) $\vec{F} = m\vec{a} = -m\frac{C^2}{pr^2}\vec{e}_r$ = force centrale. C'est la force d'interaction gravitationnelle.